EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK, Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR LIWENAGEL

29e JAARGANG 1953/54

VI

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (*f* 8,00) zijn ingetekend, betalen *f* 6,75.

De leden van L i w e n a g e l (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van W i m e c o s (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 3,00 op de postgirorekening no. 87185 van de Penningmeester van de Groep Liwenagel te Arnhem. Adreswijzigingen van deze leden te melden aan: Dr P. G. J. Vredenduin, Bakenbergseweg 158 te Arnhem. De leden van Wimecos storten hun contributie, die met ingang van 1 September 1953 gewijzigd is in *f* 6,— per jaar, op postrekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam (hierin zijn de abonnementskosten op Euclides begrepen). De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 6,75 per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107^III^, Amsterdam, aan wie tevens **alle correspondentie** gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Zwolse weg 371, Apeldoorn, tel. 330 (Wenum, K 6762). Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

INHOUD:

KORT VERSLAG VAN DE ALGEMENE VERGADERING VAN WIMECOS,

op 2 Januari 1954 te Amsterdam gehouden.

Na het openingswoord van de Voorzitter, dat in Euclides wordt gepubliceerd, werden de Notulen, het Jaarverslag en het Financiëel Verslag goedgekeurd. Uit dit laatste bleek, dat de achterstand in de inning der contributies was ingehaald, terwijl de financiële toestand gunstig genoemd kan worden. De wnd. Penningmeester werd gedechargeerd.

Hoewel een ogenblik aan contributieverlaging was gedacht, werd mede in verband met de nieuwe loonronde hiervan op dit ogenblik afgezien. Men weet n.l. niet, wat de consequenties hiervan voor de uitgaven van de Vereniging zijn. De contributie werd dus opnieuw op f. 6.—vastgesteld.

De leesportefeuille blijkt zich nog steeds niet te kunnen bedruipen. Meer lezers zijn een noodzakelijke voorwaarde voor het voortbestaan van de portefeuille.

Als Bestuurslid werd de Heer C. J. Alders uit Haarlem gekozen. Als leden der kascommissie kwamen de H.H. Dr J. Spijkerboer en A. J. Dunnebier.

Aan het Bestuur werd de bevoegdheid verleend een leerplancommissie in het leven te roepen. Inmiddels is deze benoemd.

De kwestie van vaststelling der normen voor het schriftelijk eindexamen achteraf, waartegen van Bestuurszijde door de Voorzitter bezwaren werden geuit, kwam niet tot een oplossing, daar hierover in de vergadering geen eenstemmigheid bestond.

De Voorzitter gaf hierna het woord aan Prof. Dr G. Wielenga voor zijn voordracht over „Statistiek op de Middelbare School?" Als resultaat van de discussies over deze voordracht zij vermeld, dat men er aan de ene kant zeker voor zou voelen de Statistiek op de Middelbare School te brengen, maar dat men er aan de andere kant niet blind voor is, dat dit onderwerp bij een behoorlijke behandeling met name voor de A-leerlingen van de H.B.S. en het Gymnasium nieuwe moeilijkheden met zich meebrengt.

Des middags hield Prof. Dr van Dantzig een lezing over: „Wiskundige consultatie in de practijk". Hierbij werd een blik gegeven

op het uitgebreide werk, dat het Mathematisch Centrum verricht en ook hier kwam weer de belangrijke kwestie der Statistiek naar voren. Deze voordracht zal in Euclides worden gepubliceerd.

De Secretaris,
Ir J. J. Tekelenburg.

BESTUURSMEDEDELINGEN VAN WIMECOS

Dit jaar zal het penningmeesterschap van Wimecos door de Secretaris worden waargenomen. De Heer Dr Joh. H. Wansink zal weer als tweede secretaris optreden.

In verband met verschillende verzoeken op de laatste Algemene Vergadering gedaan wijst het Bestuur er op, dat het verenigingsjaar loopt van 1 September t/m 31 Augustus. Aan de leden wordt verzocht hier met het betalen van hun contributie, die dit jaar op f. 6.— is vastgesteld, rekening te houden. Ter vermijding van inningskosten wordt men verzocht zijn contributie op postgirorekening no. 143917 van de Vereniging van Leraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea te Amsterdam over te maken. Men bedenke, dat de grote uitgaven van de Vereniging juist in de eerste twee maanden van het nieuwe verenigingsjaar komen, zodat tijdige betaling van de contributie een verenigingsbelang is. Het ligt daarom in de bedoeling van de Penningmeester dit jaar reeds in November de postkwitanties, verhoogd met f. 0.35 inningskosten, uit te laten gaan, opdat er niet weer een achterstand in de betaling ontstaat.

Namens het Bestuur van Wimecos,
Ir J. J. Tekelenburg,
Secretaris.

NOTULEN VAN DE VERGADERING VAN L.I.W.E.N.A.G.E.L.

op Maandag 4 Januari 1954 in Hotel Des Pays Bas te Utrecht.

Om 12 uur opende de voorzitter de vergadering en heette in het bijzonder welkom de heren Koning, secretaris van het Genootschap, Dr Buzeman (Wimecos), Dr Capel (Velines), Jacobs (W.V.O.), Dr Burgers (Staatsexamencommissie), en het erelid Dr Schrek.

De notulen van de vorige vergadering werden ongewijzigd goedgekeurd.

Over de invoering van de rapporten A en B kon de voorzitter in dit stadium niets zeggen. Hij hoopte daarover binnen afzienbare tijd nadere mededelingen te kunnen verstrekken. Dr Mooy, die het idee van een leerplancommissie opperde, kon door de voorzitter worden gerustgesteld met de verzekering, dat detailkwesties nog nader zullen worden bekeken. Dr Krans herinnerde aan de oproep aan de leden om zich vooral met hun wensen en opmerkingen tot het bestuur te wenden en gaf Dr Mooy in overweging zijn ideeën in te zenden.

De 2e secretaris kon meedelen, dat het archief van Liwenagel weer zover is gerestaureerd, dat de geschiedenis van de groep daaruit in grote trekken gereconstrueerd kan worden. Er ontbreekt nog het één en ander; daarover zal nog eens een oproep in het Weekblad worden geplaatst.

In aansluiting hierop deelde de voorzitter mee, dat gebleken was, dat mejuffrouw Dr Kramer op 27 October 1928 secretaresse van Liwenagel was geworden, dus ruim 25 jaar geleden. Dit feit wilde het bestuur niet ongemerkt laten voorbij gaan. Voor het vele werk, dat mejuffrouw Dr Kramer in al die jaren voor Liwenagel heeft verricht, dankte de voorzitter haar hartelijk. Hij memoreerde ook nog, dat het mejuffrouw Kramer is geweest, die na de oorlog Liwenagel weer tot leven en activiteit heeft gewekt. Vervolgens stelde hij voor mejuffrouw Dr Kramer te benoemen tot ons tweede erelid, waarmee de vergadering haar instemming betuigde. Mejuffrouw Kramer nam deze benoeming gaarne aan en dankte met enige vriendelijke woorden.

Bij de rondvraag opperde Dr Van Kuik de mogelijkheid van vrijstellingen bij het eindexamen evenals dat bij de H.B.S. gebruikelijk

is. Hierover ontspon zich een uitvoerige discussie, waaraan deelnamen de heren Dr Buzeman, Dr Capel, Jacobs, Dr Vredenduin,Dr Krans en Dr Burgers. Verschillende voor- en nadelen werden genoemd. De voorzitter zegde toe dit punt op een volgende bestuursvergadering aan de orde te stellen, evenals de door Dr Burgers genoemde vreemde combinatie van Trigonometrie en Analytische Meetkunde op het eindexamen en de tijd voor het schriftelijk examen Algebra, die liefst op twee en een half uur gebracht zou moeten worden.

Dr Schrek informeerde of men iets weet van de "Association for teaching aids in Mathematics", waarvan de voorzitter is Prof. Dr E. Gattegno en secretaris R. H. Collins (Leicester). Niemand van de aanwezigen kon hier bevestigend op antwoorden. De voorzitter beloofde, dat het bestuur zou proberen nadere inlichtingen te verkrijgen.

Tenslotte vroeg Dr Mooy, of het mogelijk zou zijn „Euclides" gratis aan de leden te verstrekken. De voorzitter antwoordde, dat dit verband houdt met de organisatievorm van Liwenagel. De mogelijkheid zal in ieder geval onderzocht worden.

Hierna sluiting van het huishoudelijk gedeelte.

Om 13.30 werd de gecombineerde vergadering met de groep Classici geopend door Dr Weiland, de voorzitter van die groep. Voor het verslag van dat gedeelte, dat om 16.45 door voorzitter Willemse van Liwenagel werd gesloten, wordt verwezen naar de notulen van de groep Classici.

D. Leujes,
2e secretaris.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr O. BOTTEMA.

XXXV. *De veiligheidskromme bij de beweging van een projectiel in het krachtveld van de bolvormige aarde.*

In Verscheidenheden XXXIII (Euclides V (1954), p. 234) werd onderzocht welke baan een projectiel beschrijft, dat in een punt A op de aarde (straal R, versnelling aan de oppervlakte g) onder een elevatiehoek α met een beginsnelheid v wordt weggeschoten (fig. 1). Voor $v < v_1 = \sqrt{2Rg}$ beschrijft het een ellips

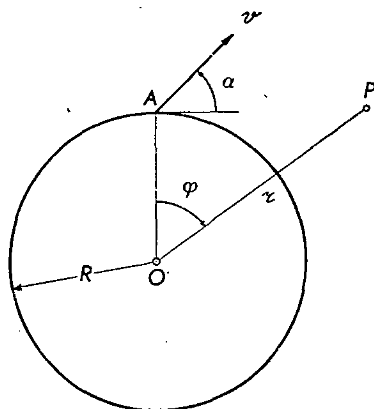


Fig. 1.

en het punt zal op aarde terugkeren. Men stelt mij de vraag of op eenvoudige wijze zou zijn aan te geven de gedaante van de *veiligheidskromme,* dus de grens van een gebied, dat uit gegeven punt A en bij gegeven beginsnelheid v door het projectiel, met variabele elevatiehoek weggeschoten, wordt bestreken.

Gebruikt men de poolcoördinaten r en φ zoals in de figuur aangegeven, dan heeft de baan de vergelijking (zie p. 000, (4), (5), (6))

$$r = \frac{Rv^2 \cos^2 \alpha}{Rg - B_1 \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

waarbij B_1 de positieve wortel is uit $(Rg - v^2 \cos^2 \alpha) + v^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ terwijl $\cos \varphi_0 = \dfrac{Rg - v^2 \cos^2 \alpha}{B_1}$; $\sin \varphi_0 = \dfrac{v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{B_1}$. Na enige herleiding kan de baanvergelijking als volgt worden geschreven:

$$Rgr = (Rg - v^2 \cos^2 \alpha) r \cos \varphi + v^2 \sin \alpha \cos \alpha \, . \, r \sin \varphi + Rv^2 \cos^2 \alpha$$

Voert men sin 2α en cos 2α in en maakt men gebruik van de ook vroeger benutte dimensieloze grootheid $k = \dfrac{2Rg - v^2}{v^2}$, dan ontstaat

$$r \sin \varphi \, . \, \sin 2\alpha + (R - r \cos \varphi) \cos 2\alpha = (k + 1) r - kr \cos \varphi - R \quad (1)$$

Om de vraag te beantwoorden of men de elevatiehoek α zo kan kiezen dat een bepaald gegeven punt D wordt gepasseerd moet men de coördinaten r en φ van D substitueren en uit de betrekking α bepalen. De vergelijking heeft de vorm $a \sin x + b \cos x = c$, die zoals bekend slechts wortels heeft als $a^2 + b^2 \geqq c^2$.

Is $a^2 + b^2 > c^2$ dan zijn er, hetzij tussen 0 en $\frac{\pi}{2}$, hetzij tussen $\frac{\pi}{2}$ en π twee wortels α, zodat het doel langs twee verschillende wegen kan worden bereikt. Is daarentegen $a^2 + b^2 < c^2$ dan heeft (1) geen wortels en het doel is onbereikbaar. De grens, verzameling der punten Q, die bij één enkele elevatiehoek kunnen worden bereikt, heeft dus de vergelijking

$$r^2 \sin^2 \varphi + (R - r \cos \varphi)^2 = \{(k + 1) r - kr \cos \varphi - R\}^2$$

Het linkerlid hiervan is $R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi$ en stelt dus het kwadraat van de afstand ϱ voor van Q tot het punt A. Daar

$$(k + 1) r - kr \cos \varphi - R = kr(1 - \cos \varphi) + (r - R) \geqq 0$$

krijgen wij

$$\varrho = (k + 1) r - kr \cos \varphi - R$$

of als wij φ elimineren met behulp van $\cos \varphi = \dfrac{R^2 + r^2 - \varrho^2}{2Rr}$:

$$(k + 2) R^2 + kr^2 - k\varrho^2 - 2(k + 1) Rr + 2R\varrho = 0 \quad (2)$$

Tot de punten waarbij men één waarde van α vindt, behoren ook die van de verticaal door A, waarvoor geldt $\varrho = r - R$. Het blijkt dan ook dat men voor (2) kan schrijven:

$$(R - r + \varrho)\{(k + 2) R - kr - k\varrho\} = 0$$

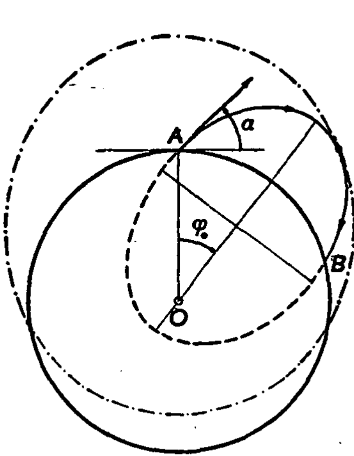


Fig. 2a.

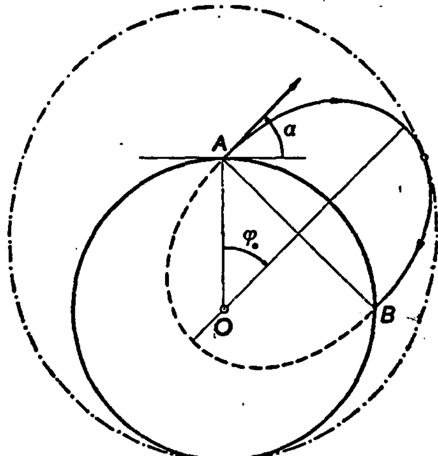


Fig. 2b.

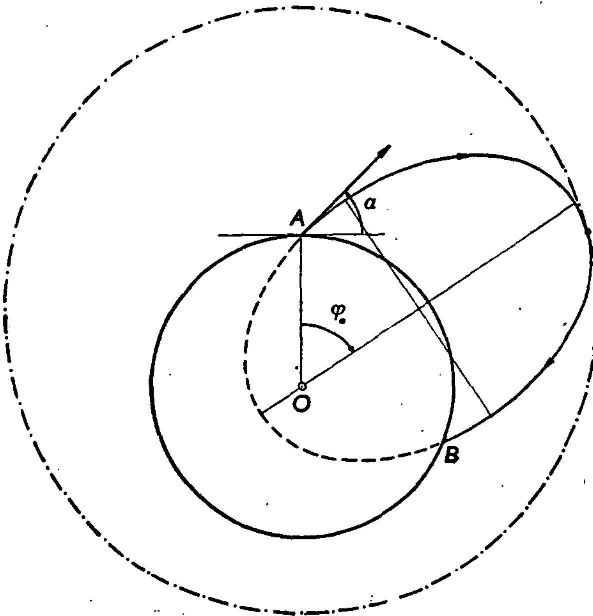


Fig. 2c.

en de vergelijking der veiligheidskromme wordt

$$\varrho + r = \frac{k+2}{k} R$$

zodat wij de merkwaardige uitkomst krijgen: *de grens van het door het projectiel bereikbare gebied wordt gevormd door de ellips, die O en A*

tot brandpunten heeft en waarvan de lange as gelijk is aan

$$\frac{k+2}{k}R = \frac{2Rg+v^2}{2Rg-v^2}R.$$

Is b de halve korte as, dan is $b^2 = \frac{k+1}{k^2}R^2$. Zijn T en S respectievelijk het bovenste en het onderste uiteinde van de lange as, dan is $OS = \frac{k+2}{2k}R - \frac{1}{2}R = \frac{R}{k}$. Voor $k > 1$, $k = 1$, $0 < k < 1$ ligt dus S resp. binnen, op of buiten de aarde en men ziet gemakkelijk in dat de veiligheidskromme resp. de aarde snijdt, in de antipode van A aan de aarde raakt of haar geheel omsluit. Dit is in overeenstemming met de in de drie gevallen vroeger voor de baankrommen gevonden resultaten. In fig. 2 zijn de veiligheidskrommen geschetst voor resp. $k = \frac{4}{3}$, $k = 1$ en $k = \frac{2}{3}$, waarbij telkens een enkele baankromme is getekend, die blijkbaar aan de grenskromme moet raken.

XXXVI. *Punten op de aardbol, waarvoor de geografische lengte en breedte gelijk zijn.*

De breedte ϑ en de lengte φ bepalen de plaats van een punt A op een boloppervlak. In overeenstemming met het practische gebruik tellen wij ϑ van $-\frac{\pi}{2}$ tot $\frac{\pi}{2}$ en φ van $-\pi$ tot π. Kiest men een rechthoekig assenstelsel als in fig. 1, dan komen punten met de eigenschap $\vartheta = \varphi$ blijkbaar slechts voor in het octant $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ en in het octant $x > 0$, $y < 0$, $z < 0$.

Wij zullen de meetkundige plaats dezer punten bepalen.

Kiezen wij de straal van de bol gelijk aan 1, dan geldt blijkbaar voor de rechthoekige coördinaten van A:
$x = \cos\vartheta\cos\varphi$, $y = \cos\vartheta\sin\varphi$, $z = \sin\vartheta$.

Voor een punt met de eigenschap $\vartheta = \varphi = t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ geldt

$$x = \cos^2 t,\ y = \cos t \sin t,\ z = \sin t$$

en dit zijn dus de parametervergelijkingen van de meetkundige plaats. Onmiddellijk blijkt dat niet alleen geldt

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

maar ook

$$x + z^2 = 1.$$

De gevraagde punten liggen dus, behalve op de bol, op de door de tweede vergelijking voorgestelde parabolische cylinder Q_1. De beschrijvende lijnen van deze laatste zijn evenwijdig met de Y-as,

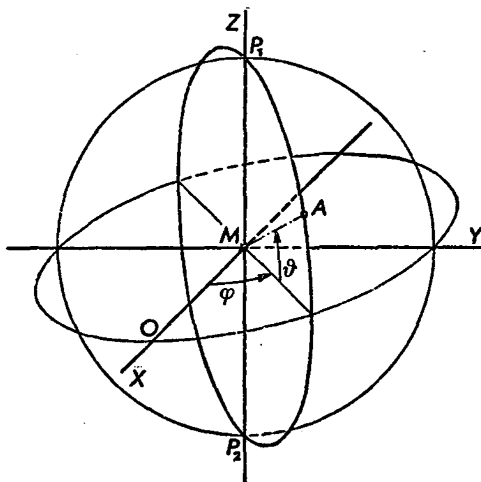


Fig. 1.

terwijl de doorsnede met het XMZ vlak de parabool is, die O tot top en OM tot as heeft en door de polen P_1 en P_2 gaat. De gevraagde punten liggen dus op de doorsnede k van twee quadratische oppervlakken; deze kromme k is dus een biquadratische ruimtekromme. Omdat de beide oppervlakken in O hetzelfde raakvlak hebben, heeft k een dubbelpunt in O.

k is de basiskromme van een bundel quadratische oppervlakken. Een dergelijke bundel bevat in het algemeen vier kegels; in ons geval, waarbij k een dubbelpunt heeft, zijn twee dezer kegels samengevallen. Schrijft men de bundelvergelijking als volgt

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 + \lambda(x + z^2 - 1) = 0$$

dan wordt blijkbaar een kegel door $\lambda = \infty$ aangewezen, nl. de parabolische cylinder Q_1. Een tweede kegel Q_2 vindt men voor $\lambda = -1$; haar vergelijking is

$$x^2 + y^2 - x = 0$$

Q_2 is dus de cirkelcylinder, waarvan de beschrijvenden evenwijdig zijn met de Z-as en die het MXY-vlak snijdt volgens de cirkel met OM tot middellijn.

De derde, dubbel te tellen kegel Q_3 tenslotte, wordt door $\lambda = -2$ aangewezen; de vergelijking luidt

$$(x - 1)^2 + y^2 - z^2 = 0$$

Zij stelt de rechte cirkelkegel voor met O tot top, de Z-as als

asrichting en met als asdoorsnede twee elkaar loodrecht snijdende beschrijvenden.

De kromme *k* ligt dus op vier eenvoudig aan te wijzen oppervlakken: de bol, de parabolische cylinder Q_1, de rechte cirkelcylinder Q_2 en de rechte cirkelkegel Q_3.

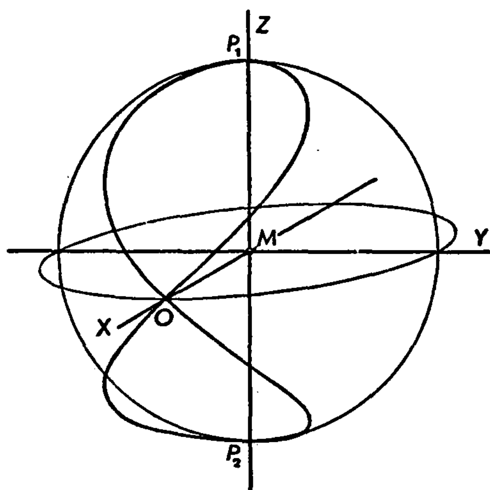


Fig. 2.

Zij heeft de gedaante van een 8 en is in fig. 2 geschetst. Haar rechthoekige projectie op *MXY* is een cirkel en op *MZX* een parabool; de centrale projectie uit *O* op *MYZ* is een rechthoekige hyperbool.

Alleen het deel van de kromme dat in de beide bovengenoemde octanten ligt vormt de gevraagde meetkundige plaats.

Men kan de parametervergelijkingen van *k* ook in rationale gedaante brengen. Stelt men $tg\frac{1}{2}t = u$, dan krijgt men, homogene coordinaten invoerend:

$$x = (1 - u^2)^2, \quad y = 2u(1 - u^2), \quad z = 2u(1 + u^2), \quad w = (1 + u^2)^2.$$

De kromme is rationaal. Voor de meetkundige plaats geldt de beperking $-1 < u < 1$.

Schetst men de kromme op een globe, als nulmeridiaan die van Greenwich kiezend, dan ligt O in de golf van Guinee; de kromme vertrekt in noordoostelijke richting, gaat door de Sahara naar de Nijldelta, door Klein-Azië, snijdt de Kaukasus en verdwijnt langs de Oeral en Noordwest Siberië in de richting van de Noordpool; de andere tak gaat door de Atlantische Oceaan naar het Antarctische gebied.

VAN KOORDE TOT SINUS
VAN UMBRA TOT TANGENS

Voordracht voor het Mathematisch Centrum 4 November 1953.

Bij de keuze van het onderwerp voor deze voordracht heb ik mij laten leiden door de overweging, dat het voor docenten bij het M. en V.H.O. niet alleen nuttig, ja nodig is, dat zij de eenvoudige stof die zij te onderwijzen hebben, van een hoger wetenschappelijk standpunt uit kunnen overzien, maar ook, dat zij een juiste kijk hebben op de wijze waarop zij tot haar tegenwoordige gedaante gegroeid is. Het eerste vormt een waarborg, dat men het onderwerp op zijn juiste plaats in het grote geheel der wiskundige kennis ziet en zich dus een juist oordeel over de relatieve waarde en betekenis ervan kan vormen; het behoedt tegen het gevaar van overschatting, dat bij elk onderdeel der wiskunde dat zich zelfstandig heeft gemaakt, optreedt en dat zo gemakkelijk tot een zekere hypertrophie in de behandeling kan voeren. Het tweede kan helpen voorkomen, dat men de waarde van wat men te doceren heeft, gaat onderschatten, dat men het triviaal gaat vinden en zich niet meer bewust blijft van het mathematisch vernuft dat ook in het schijnbaar eenvoudige en voor de hand liggende schuilt. Natuurlijk is vertrouwdheid met de geschiedenis van een vak niet het enige middel om aan het gevaar van wat men didactische verveling zou kunnen noemen, te ontkomen; het is zelfs niet het voornaamste. Sterker is nog de werking van de jaarlijks terugkerende vernieuwing van de didactische situatie, van het heugelijk feit, dat weliswaar de leraar en de stof die hij te doceren heeft, dezelfde zijn, maar de leerlingen ieder jaar weer andere. Daardoor wordt de verfrissende stemming geboren die het begin van een nieuwe cursus pleegt te kenmerken en die bij de docent het voornemen opwekt, nu toch eens te proberen, alles zo duidelijk en overtuigend te behandelen, dat iedereen het wel begrijpen moet. Maar, zoals ik al zei, tot zijn eigen opgewektheid, die zulk een essentieel element in het onderwijs is, kan de kennis van de geschiedenis van het te doceren vak heel veel bijdragen; zij kan hem helpen, dat wat elementair is en daardoor triviaal lijkt, weer als wetenschappelijke vondst en prestatie te beleven.

Ik heb daarom een elementair-mathematisch onderwerp gekozen, dat op onze scholen in vrij grote, misschien zelfs wel tè grote intensiteit wordt onderwezen, nl. de goniometrie en ik wil trachten, U in dit uur enkele trekken van de historische ontwikkeling van dit vak te schetsen.

Wanneer wij onder goniometrie dat deel van de meetkunde verstaan, waarin men hoeken bepaalt met behulp van lijnstukken en ze in berekeningen door die lijnstukken laat vertegenwoordigen, kan men veilig zeggen, dat zij een vrucht van klassiek-Griekse bodem is. Dat is een uitspraak die naar twee kanten verwondering kan wekken, doordat men haar òf overbodig òf onjuist vindt. Natuurlijk, zal de een zeggen, onze gehele elementaire wiskunde stamt toch van de Hellenen. Natuurlijk niet, zegt de ander, goniometrie werkt immers met functies als sinus en tangens en men behoeft slechts heel weinig in de geschiedenis der wiskunde thuis te zijn om van het eerste begrip de Indische, van het tweede de Arabische oorsprong te kennen. Beide tegenwerpingen zijn echter onjuist: niet onze gehele elementaire wiskunde stamt uit Hellas, b.v. de algebra zeer bepaald niet; en dat wij tegenwoordig goniometrie uitsluitend met behulp van de functies sinus en tangens bedrijven, sluit niet in, dat het doel van het vak, zoals ik dat omschreven heb, niet op een andere manier bereikt zou kunnen worden.

Wij kunnen over het ontstaan der goniometrie nog meer zeggen dan dat zij uit Hellas komt, nl. dat zij haar oorsprong vindt in de Griekse astronomie. Dit sluit in, dat er niet eerst een theorie van goniometrische functies ontwikkeld is, die later toepassing bleek te kunnen vinden in problemen der vlakke meetkunde en nog later in problemen der bolmeetkunde, maar dat de volgorde bijna de omgekeerde is geweest. Eerst is er trigonometrie geweest met sterke overheersing van de spherische boven de vlakke en pas veel later is men goniometrische functies als zodanig gaan beschouwen. Zoals dat zo vaak het geval is, is de volgorde waarin het vak om didactische redenen in het onderwijs wordt behandeld, vrijwel tegenovergesteld aan die waarin het historisch gegroeid is.

Uit de astronomische oorsprong der goniometrie vloeit voort, dat men, om zich over haar oudste phasen te orienteren, òf astronomische werken moet raadplegen òf mathematische die door hun titel *Sphaerica* hun afkomst verraden. Ik ontleen dan ook wat ik over Griekse goniometrie wil zeggen ten dele aan de *Almagest* van Ptolemaeus (2e eeuw na Chr.), ten dele aan de iets oudere *Sphaerica* van Menelaos van Alexandrie.

Het is heel eenvoudig in te zien, hoe de goniometrie ontstaan kan zijn. Het is gemakkelijker, een recht lijnstuk te meten dan een hoek of een cirkelboog. Kunnen wij het laatste niet door het eerste vervangen? Kunnen wij — dat is wel de meest voor de hand liggende gedachte — een cirkelboog niet bepalen door zijn koorde? Er is een eenvoudig meettoestel, dat op die gedachte berust; het stond later

als *triquetrum* bekend (Fig. 1). Een vaste verticale lat AB draagt een schaalverdeling. Een tweede even lange lat AC is aan de bovenkant scharnierend met de eerste verbonden en van een vizierinrichting voorzien. Om door die vizierinrichting naar een ster te kijken, moet men het uiteinde C langs een derde lat laten glijden, waarop dezelfde verdeling is aangebracht. Meet men nu de lengte van BC, dan kent men de koorde die de hoek α, d.i. de zenitsafstand van de ster, bepaalt. De oorspronkelijk enige goniometrische functie van een hoek of boog kan dus worden gedefinieerd als de lengte van de koorde die in een cirkel van gegeven straal die hoek of boog onderspant. Wij zullen deze functie, die door de Grieken steeds volledig in woorden omschreven wordt, door het teken crd α aangeven.

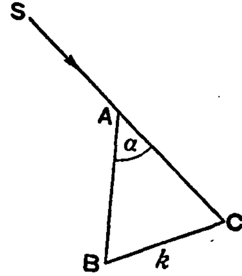


Fig. 1. Het triquetrum.

Het eerste wat nu nodig is, is een tafel om bij gegeven boog de koorde te vinden en omgekeerd. Een voorbeeld van zulk een koordentafel vinden wij in Boek I van de *Almagest.* Ik schrijf er een fragment van op, overgebracht in ons cijferschrift, maar natuurlijk met handhaving van de sexagesimale indeling.

Delen van de omtrek	Delen van de straal [1])	Zestigsten
30′	0;31,25	0, 1, 2,50
1°	1; 2,50	0, 1, 2,50
1°30′	1;34,15	0, 1, 2,50
2°	2; 5,40	0, 1, 2,50
2°30′	2;37, 4	0, 1, 2,48
3°	3; 8,28	0, 1, 2,48
14°	14;37,27	0, 1, 2,21
14°30′	15; 8,38	0, 1, 2,19
15°	15;39,47	0, 1, 2,17

[1]) Ik pas hier de in de practijk zeer doelmatig blijkende notatie van sexagesimale breuken toe, waarbij gehelen van sexagesimale delen worden gescheiden door een kommapunt, terwijl de groepen sexagesimalen (elk decimaal positioneel geschreven) door komma's worden gescheiden.
De tafel geeft de lengte van de koorde, uitgedrukt in $R/60 = p$ als eenheid. Dus b.v.

$$\text{koorde } 3^\circ = 3;8,28p = \left(\frac{3}{60} + \frac{8}{60^2} + \frac{28}{60^3}\right)R$$

De eerste kolom behoeft geen toelichting. De tweede is eveneens sexagesimaal geschreven, waarbij $R = 60\,p$. 1;34,15 beduidt dus

$$(1/60 + 34/60^2 + 15/60^3)R$$

De derde kolom geeft de verschillen per minuut. Voor interpolatie wordt dus tussen 30′ en 1° per minuut opgeteld 0;0,1,2,50.

Men kan natuurlijk ook terugzoeken. Vindt men (Fig. 1) voor $AB = 60\,p$ $BC = 15\,p$, dan is $\alpha = 14°21'$.

Fig. 2.

Fig. 3.

Alvorens op het gebruik van de tafel nader in te gaan, spreek ik eerst even over de wijze waarop zij berekend is. Ptolemaeus deelt dit in Boek I van de *Almagest* uitvoerig mee. Hij gaat (Fig. 2) daartoe uit van de bekende waarden crd (36°), crd (60°) en crd (72°). Men vindt

crd 72° = 70;32,33 crd 60° = 60

Fig. 4. $AB = BC = \text{crd}\,\alpha$. $DC = DE$, waaruit volgt $BE = BC = BA$.

Hij leidt nu eerst een formule af voor crd $(\alpha - \beta)$ uitgedrukt in crd α en crd β. Hiervoor dient de nog steeds naar hem genoemde stelling voor een koordenvierhoek. Wij zien (Fig. 3):

$120 \,.\, \text{crd}\,(\alpha - \beta) + \text{crd}\,\beta \,.\, \text{crd}\,(180° - \alpha) = \text{crd}\,(180° - \beta) \,.\, \text{crd}\,\alpha$. dus

$120 \,.\, \text{crd}(\alpha - \beta) = \text{crd}\,\alpha \,.\, \text{crd}\,(180° - \beta) - \text{crd}\,\beta \,.\, \text{crd}\,(180° - \alpha)$.

Men vindt zo
120 . crd 12° = crd 72° . crd 120° — crd 60° . crd 108°
waarin crd 108° volgt uit crd² 72° + crd² 108° = 120².

Nu is nog een formule voor crd $\frac{\alpha}{2}$ nodig. Men vindt (Fig. 4) $\text{crd}^2\,\alpha = 120 \cdot \frac{1}{2}[120 - \text{crd}\,(180° - 2\alpha)]$, dus

$$\text{crd}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{60[120 - \text{crd}\,(180° - \alpha)]}$$

b.v. $\text{crd}\,6° = \sqrt{60(120 - 119;20,34)} = \sqrt{60 \,.\, 0;39,26} =$

$$= \sqrt{39;26} = 6;16,49$$

Zo doorgaande vindt men crd 3°, crd 1°30′ en crd 45′. Om nu crd 1° te vinden hebben wij nog een hulpstelling nodig, nl.: is $90° > \alpha > \beta$ dan geldt de ongelijkheid

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\text{crd}\,\alpha}{\text{crd}\,\beta}$$

Fig. 5. bg $AE = \alpha$, bg $BE = \beta$, $OD \perp AB$, $OC = OG = OF$.

Dit blijkt als volgt:

$$\frac{\beta}{\frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{\text{sect.}\,OFC}{\text{sect.}\,OGC} < \frac{\triangle OCB}{\triangle OCD} = \frac{BC}{DC}$$

$$\frac{\beta}{\frac{\alpha + \beta}{2}} < \frac{BC}{\frac{AB}{2}} \rightarrow \frac{\beta}{\alpha + \beta} < \frac{BC}{AB} \rightarrow \frac{\beta}{\alpha} < \frac{BC}{AC}$$

dus

$$\frac{\beta}{\alpha} < \frac{BE}{AE} \rightarrow \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\text{crd}\,\alpha}{\text{crd}\,\beta}$$

Dit geeft

$$\frac{1^\circ}{45'} > \frac{\text{crd } 1^\circ}{\text{crd } 45'} \rightarrow \text{crd } 1^\circ < \frac{4}{3} \,.\, \text{crd } 45'$$

$$\frac{1^\circ 30'}{1^\circ} > \frac{\text{crd } 1^\circ 30'}{\text{crd } 1^\circ} \rightarrow \text{crd } 1^\circ > \frac{2}{3} \text{crd } 1^\circ 30'.$$

Men vindt hieruit enkele sexagesimalen van crd 1°, daaruit met de halveringsformule crd 30′. Met behulp van de stelling van Ptolemaeus vindt men nu een uitdrukking voor crd $(\alpha + \beta)$; daarna kan men door opklimming de tafel met intervallen van 30′ berekenen.

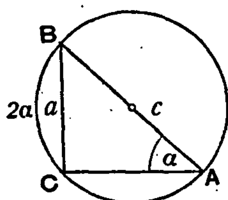


Fig. 6.

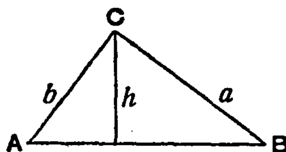


Fig. 7.

Men kan nu met de tafel natuurlijk al eenvoudige trigionometrische vraagstukken oplossen. In een rechthoekige driehoek kan men schrijven

$$a = \frac{c}{120} \text{crd } 2\alpha \quad \text{of} \quad a = \frac{c}{60} \cdot \tfrac{1}{2} \text{crd } 2\alpha$$

In een scheefhoekige: $60\,h = \frac{1}{2}b \,.\, \text{crd } 2\alpha = \frac{1}{2}a \,.\, \text{crd } 2\beta$ waaruit volgt

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{crd } 2\alpha}{\text{crd } 2\beta}$$

Het valt nu op, dat als in een vraagstuk een hoek α voorkomt, men in de berekening niet crd α ontmoet, maar steeds $\frac{1}{2}$. crd 2α, d.w.z. het valt *ons* op en wij zouden dadelijk aan deze functie een naam geven en haar eigenschappen gaan onderzoeken.

Hebben de Grieken het ook gemerkt? Misschien wel, maar een naam hebben ze er niet aan gegeven. Zij zijn — en dat is een belangrijk historisch feit, dat met andere soortgelijke feiten verbonden een remmende invloed op de ontwikkeling der Griekse wiskunde heeft uitgeoefend — altijd blijven spreken van de halve koorde van de dubbele boog, waarvoor wij de naam sinus hebben.

Daarnaast komt in de berekeningen ook de halve koorde van het

supplement van de dubbele boog voor, die wij cos noemen. Wij kunnen kort schrijven

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

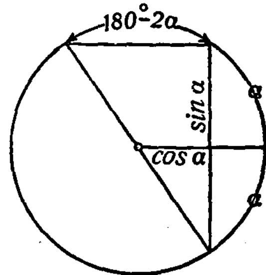


Fig. 8.

terwijl de Grieken ditzelfde inzicht uitdrukken door in woorden te zeggen, wat wij, hun spreekwijze afkortend, kunnen weergeven door

$$(\tfrac{1}{2} \text{ crd } 2\alpha)^2 + [\tfrac{1}{2} \text{ crd } (180^\circ - 2\alpha)]^2 = 60^2$$

of

$$\text{crd}^2\, 2\alpha + \text{crd}^2\, (180^\circ - 2\alpha) = 4 \,.\, 60^2$$

Het zal U nu reeds duidelijk zijn, dat de koordentafel van Ptolemaeus in werkelijkheid een sinustafel is. Wil men b.v. sin 7° weten, dan bedenke men slechts

$$60 \sin 7^\circ = \tfrac{1}{2} \text{ crd } 14^\circ = 7;18,43,30 \text{ dus } \sin 7^\circ = \frac{7}{60} + \frac{18}{3600} + \ldots$$

En tevens, dat men generlei anachronisme begaat, alleen de uitdrukkingswijze wat afkort, door waar in de Griekse tekst staat „halve koorde van de dubbele boog" dit door „sinus" weer te geven en voor „halve koorde van het supplement van de dubbele boog" „cosinus" te zetten. Men doet dan niets anders dan wat men bij het weergeven van een Griekse wiskundige redenering altijd moet doen, namelijk een verkortende uitdrukkingswijze toepassen en tekenschrift gebruiken.

Natuurlijk dreigt hierbij altijd het gevaar, dat men de weer te geven gedachtengang vervormt en aan een antieke auteur redeneringen in de mond legt, die hij niet gehouden heeft en niet zou hebben kunnen houden. Dit geval doet zich bij ons onderwerp echter niet voor. De term „halve koorde van de dubbele boog" komt zo vaak als staande uitdrukking voor, dat men, als men hem door „sinus" vertaalt, niets anders doet dan wanneer men b.v. de staande astronomische uitdrukking „cirkel door de middens der dierenriembeelden" door „ecliptica" weergeeft. De Grieken zijn er nu eenmaal nog niet op uit, de dingen zo kort mogelijk te zeggen en dat hun taal er zich uitstekend toe leent, korte en duidelijke technische termen te vormen, hebben zij zelf lang niet zo goed geweten als wij.

Zoals ik reeds opmerkte, is voor de Griekse astronomen en mathe-

matici het terrein van de toepassing der goniometrie niet in de eerste plaats in de vlakke, maar in de bolmeetkunde gelegen. Die toepassingen berusten alle op een door Menelaos uitgesproken en bewezen lemma, dat in latere Latijnse vertalingen van Arabische teksten de naam van *regula sex quantitatum* zal dragen. Dit lemma wordt eerst planimetrisch uitgesproken en daarna stereometrisch.

a) planimetrisch

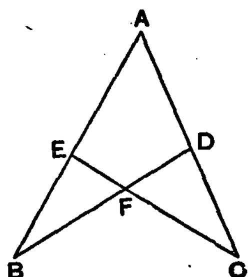


Fig. 9.

De benen van hoek A worden gesneden door de rechten BD en CE, die elkaar in F ontmoeten. Het lemma zegt nu

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AD}{DC} \cdot \frac{CF}{FE} \qquad (1)$$

Men kan dit ook schrijven als

$$\frac{AB \cdot DC \cdot FE}{BE \cdot AD \cdot CF} = 1$$

en als men dit wat ordelijker schrijft als

$$\frac{BA \cdot FE \cdot DC}{BE \cdot FC \cdot DA} = 1$$

zult U er de stelling van Menelaos in herkennen voor $\triangle\, AEC$ met transversaal BFD. Deze ongetwijfeld eenvoudiger opvatting van de stelling komt echter in de Griekse wiskunde nog niet voor. Men schrijft daar altijd een verhouding van twee stukken op een been als product van de verhoudingen van twee stukken op het andere been en van twee stukken op een der transversalen. Men kan dit natuurlijk op verschillende manieren doen, nl.

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CD} \cdot \frac{DF}{FB}$$

of

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FD}$$

of

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BE} \cdot \frac{EF}{FC} \qquad (1)$$

b) stereometrisch

Onze tegenwoordige opvatting toepassend kunnen wij schrijven in $\triangle\, ABC$ met transversaal WUV

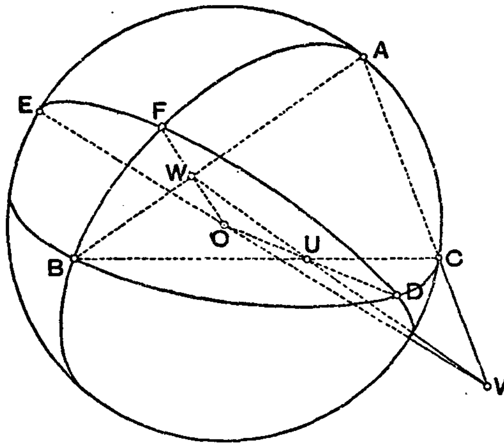
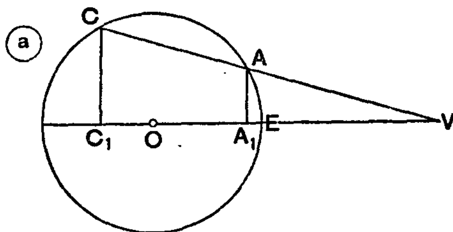


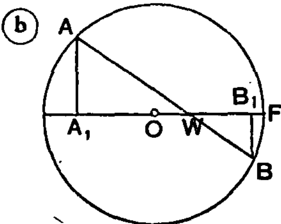
Fig. 10. ABC is een boldriehoek van een bol met middelpunt O. EFD is een grote cirkel van deze bol. Bepaald zijn de snijpunten U van OD en BC, V van OE en AC, W van OF en AB. U, V, W liggen op de snijlijn van de vlakken $ODEF$ en ABC.

$$\frac{WA \,.\, UB \,.\, VC}{WB \,.\, UC \,.\, VA} = 1 \text{ waaruit volgt [2] } \frac{\sin FA \,.\, \sin DB \,.\, \sin EC}{\sin FB \,.\, \sin DC \,.\, \sin EA} = 1$$

en dit is de stelling van Menelaos voor boldriehoek ABC met transversaal FDE.

De Grieken zelf schrijven dit ook weer in een der vormen die wij bij de planimetrische behandeling hebben leren kennen, maar ter wille van de eenvoud blijf ik me nu maar verder van de bovenstaande notatie bedienen.





[2]) Hoe deze overgang plaats heeft, blijkt uit de 2 nevenstaande figuren.

Fig. a)

$$\frac{VC}{VA} = \frac{CC_1}{AA_1} = \frac{\sin EC}{\sin EA}$$

Fig. b)

$$\frac{WA}{WB} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{\sin FA}{\sin FB}$$

Van de talloze toepassingen die de Griekse astronomen van deze regula sex quantitatum hebben gemaakt, noem ik als eerste concrete voorbeeld de bepaling van de betrekking tussen lengte,

Fig. 11.

rechte klimming en declinatie van de zon. In $\triangle LEA$ met transversaal SPS_1 heeft men

$$\frac{\sin SL \cdot \sin PE \cdot \sin S_1A}{\sin SE \cdot \sin PA \cdot \sin S_1L} = 1$$

d.w.z.

$$\frac{\sin \lambda \cdot \cos \varepsilon \cdot \cos AR}{\cos \lambda \cdot 1 \cdot \sin AR} = 1$$

aequivalent met onze formule

$$\operatorname{tg} AR = \operatorname{tg} \lambda \cdot \cos \varepsilon.$$

Hier gaan wij nu echter al verder dan de Grieken ooit gegaan zijn: zij hebben nooit het quotient van sinus en cosinus als een zelfstandige functie beschouwd en wanneer men van tangens spreekt begaat men wel de fout, hun gedachtengang ongeoorloofd te moderniseren.

Als tweede voorbeeld beschouwen we $\triangle PES$ met transversaal ALS_1. Dit geeft

$$\frac{\sin AP \cdot \sin LE \cdot \sin S_1S}{\sin AE \cdot \sin LS \cdot \sin S_1P} \text{ of } \frac{1 \cdot \quad 1 \cdot \quad \sin \delta}{\sin \varepsilon \cdot \sin \lambda \cdot 1} = 1$$

of

$$\sin \delta = \sin \lambda \cdot \sin \varepsilon$$

Het zal U hierdoor in beginsel wel duidelijk zijn, dat men al de

verschillende formules van de rechthoekige boldriehoek zo kan krijgen. Met de regula sex quantitatum doen de Griekse astronomen dan ook alles. Niet-rechthoekige boldriehoeken kunnen behandeld worden door verdeling in twee rechthoekige.

Voordat ik nu tot latere phasen van de ontwikkeling der goniometrie overga, wil ik nog even terugkomen op het merkwaardige feit, dat de Grieken niet een tangensfunctie hebben gebruikt in dezelfde zin waarin zij wel de sinus toepassen. Er bestaat namelijk een veelgebruikt astronomisch instrument, dat, zou men zeggen, onvermijdelijk tot die functie had moeten leiden op dezelfde wijze waarop het triquetrum tot de koorde-functie aanleiding gaf. Het is het meest eenvoudige en fundamentele van alle instrumenten, de gnomon. Men vindt herhaaldelijk een zonnehoogte gekarakteriseerd door de schaduwlengte van een verticale staaf van 60 partes, maar men is er nooit toe overgegaan, de resultaten systematisch in een tabel te verenigen, die dan de oudste cotangententafel zou zijn geweest.

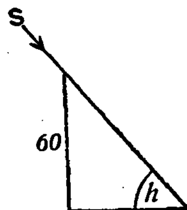


Fig. 12.

De eerste verdere ontwikkeling van de goniometrie na de Grieken vinden wij in India, waar waarschijnlijk ca 400 na Chr. de Surya Siddhanta ontstond en iets later de Aryabhatiya van de wiskundige en astronoom Aryabhata I (476—550). Hier krijgt namelijk de halve koorde van de verdubbelde boog de naam *ardhadjya*, waarin ardha half beduidt en djya koorde. Dit woord werd afgekort tot djya. De Arabieren maakten hiervan gîb en daar zij alleen medeklinkers schreven, identificeerden zij het met het woord gaib = plooi, opening in een kledingstuk, boezem. Dit werd door Gerard van Cremona in de 12e eeuw in het Latijn vertaald als sinus, dat ook kromming, welving, plooi (b.v. in een toga) betekent, vandaar ook boezem in de zin van borst en figuurlijk zeeboezem. De etymologie is dus nogal ingewikkeld en draagt, anders dan bij tangens het geval zal blijken te zijn, niets tot het begrip van de functie bij.

De invoering van de nieuwe naam beduidde natuurlijk een vereenvoudiging in de Griekse koordenrekening. Men moet zich daarvan overigens geen overdreven voorstelling maken, want men bleef alles in woorden zeggen. Van een behoorlijk tekenschrift zou nog in eeuwen geen sprake zijn.

Voor de cosinus bestaat ook een eigen Indisch woord, nl. cotidjya, dat sinus van de rest, nl. van het complement, beduidt.

Dit woord heeft zich echter in het Latijn lang niet zo vlug ingeburgerd als sinus. Gerard van Cremona schrijft sinus residui; later

vindt men sinus complementi, maar eerst in de 17e eeuw treedt de term cosinus op.

De genoemde Indische werken bevatten ook sinustafels met interval 3°45′. Deze vertonen echter nog een ander kenmerkend verschil met de Griekse koordentafels dan de vervanging van crd door sin. De straal R wordt namelijk niet langer in 60 partes verdeeld, maar in 3438 partes minutae. Dit hangt samen met de verdeling van de cirkelomtrek in $60 \,.\, 360 = 21.600$ minuten. Een boog waarvan de lengte gelijk is aan de straal bevat dus $21.600/2\pi$ minuten en wanneer men voor π de waarde 3,14136 neemt, vindt men bij afronding tot gehelen hiervoor de waarde 3438. Wij beleven hier het eerste optreden van de radiaal. 3438 vervult dezelfde functie als bij ons 206265″ voor een radiaal. Alleen wordt niet de straal gebruikt om cirkelbogen te meten, maar de delen van de cirkelomtrek om de met die cirkel in verband staande lijnstukken te meten.

Natuurlijk bevat de sinustafel nu heel andere getallen dan de koordentafel of de latere sinustafels, bv. $\sin 15° = 890$, waaruit onze waarde $\sin 15° = 890/3438 = 0{,}26$.

Bij de Indiers treedt onder de naam utkramadjya ook de functie op, die later sinus versus of sagitta zal heten en die overeenkomt met onze uitdrukking $(1 — \cos\alpha)$.

In de verdere ontwikkelingsgeschiedenis der goniometrie moet nu voor alles de naam van de Arabische astronoom al-Battani (Albategnius) (858—929) vermeld worden. Hij bepleitte krachtig het gebruik van de sinus in plaats van de koorde met de motivering, dat men dan niet telkens behoeft te verdubbelen ($a = c \sin \alpha$ i.p.v. $a = \frac{1}{2}c \,.\, \text{crd}\, 2\alpha$). Hij schijnt ook, wat de Grieken nog niet hadden gedaan, als eerste de cotangententafel voor de gnomon berekend te hebben volgens de formule

$$x = l \frac{\sin (90° — h)}{\sin h}$$

echter nog niet met volledig inzicht in de algemene toepasbaarheid. Hij stelt nl. met de Indiers $l = 12$ vingers en niet $l = 60$ partes. Men kan in zijn tafel dan ook de cotangenten pas vinden, als men alle getallen door 5 deelt. Hij schrijft immers $x = 12 \,.\, f(\alpha)$, wij $x = 60 \,.\, \cot \alpha$, dus $\cot \alpha = f(\alpha)/5$.

De tafel waarvan hij spreekt is echter niet bewaard.

Verder heeft Albategnius in de goniometrie de umbra-functies ingevoerd (Fig. 13). Bij de verticale gnomon beschouwt hij de umbra extensa ($l \,.\, \cot h$), bij de horizontale de umbra versa ($l \,.\, \text{tg}\; h$). De

Arabieren hebben steeds aan deze umbra-terminologie vastgehouden.

Bij de Arabieren vindt men nu ook de eerste systematische behandeling van de vlakke en spherische trigonometrie, nl. in een vertaling van de *Almagest* door Abu 'l Wafa (940—997). Hier worden de functies sin en cos gebruikt, voorts umbra recta en umbra versa, die resp. met cot en tg corresponderen en zelfs de functies die later sec en cosec zouden heten (bij hem diameter van 1e, resp. 2e schaduw). Het verband met werkelijk invallend zonlicht is nu losgelaten (Fig. 14).

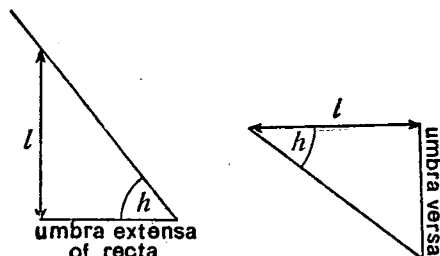


Fig. 13.

Γ_1 werpt op vlak α de umbra versa, Γ_2 op vlak β de umbra recta. Men vindt de fundamentele betrekkingen

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = r^2 \qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{tg}\, a}{r} \quad \text{enz.}$$

Hoogst merkwaardig is, dat hij de volgende opmerking maakt. Als men $r = 1$ stelt, kan men zeggen, dat de verhouding van de sinus

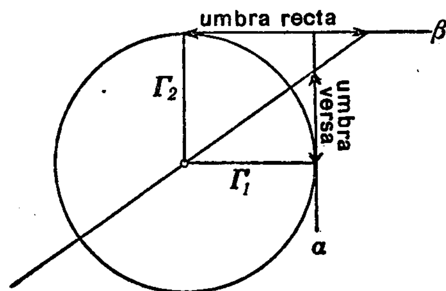


Fig. 14.

en de sinus van het complement de eerste schaduw is. Helaas is deze opmerking zonder uitwerking gebleven. Tot aan het eind van de 18e eeuw heeft men steeds r, de sinus totus, in de formules laten staan.

Abu 'l Wafa heeft in de spherische trigonometrie de regula sex

quantitatum uitgeschakeld en vervangen door de regula quattuor quantitatum en het schaduw-theorema. De eerste regel zegt, dat in nevenstaande figuur, waarin P de pool van cirkel ACC_1 is,

$$\frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin a_1}{\sin c_1}$$

zoals uit onze formule $\sin a = \sin c \,.\, \sin \varepsilon$ volgt. (Bewijs in $\triangle PBB_1$ met transversaal CAC_1). Het schaduwtheorema luidt in onze schrijfwijze

$$\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a_1} = \frac{\sin b}{\sin b_1} \text{ zoals volgt uit } \operatorname{tg} a = \sin b \operatorname{tg} \varepsilon$$

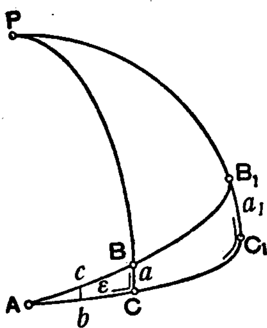


Fig. 15. $AC = b$, $AB = c$, $AC_1 = b_1$, $AB_1 = c_1$.

Abu 'l Wafa definieert de umbra versa als stuk op de raaklijn, namelijk als halve raaklijn van de dubbele boog. Hierdoor was de naam tangens voorbereid. Verwonderlijk is, dat de term zo lang op zich heeft laten wachten. Hij is pas ingevoerd door de Deense wiskundige Th. Fink in zijn *Geometria rotundi* (1583) tegelijk met secans. In korte tijd is hij daarna algemeen geldig geworden.

Bij Abu 'l Wafa was de trigonometrie blijkens haar behandeling in de *Almagest* nog geheel hulpwetenschap. De eerste volledige behandeling als autonome wetenschap schijnt wel te danken te zijn geweest aan de Perzische wiskundige Nasir ed Din al-Tusi (1201—1274); hij schreef een werk *Kitab shakl al-qatta* (boek over de figuur met de snijlijn, dus blijkbaar over de stelling van Menelaos, die daarom in de latere Latijnse geschriften ook wel de regula catta heet). De behandeling is zeer volledig met koorde èn sinus. Men vindt in dit, eerst in 1891 bekend geworden, geschrift verscheidene dingen die men altijd veel later had gedateerd, zoals de uitdrukkelijke formulering van de sinusregel voor de vlakke driehoek en het gebruik van de pooldriehoek voor afleiding van formules voor de boldriehoek.

Men kan op grond van dit werk veilig zeggen, dat de Arabieren de trigonometrie hebben voltooid; wat later kwam was alleen nog verbetering van de symboliek en verdere uitwerking.

Verdere bijdragen werden nog geleverd door de West-Arabische astronomen Jabir ibn Aflah, de Geber der Middeleeuwen, en al-Zarkali (1029—1087), de bewerker van de z.g. Toledaanse planeettafels. Ca. 1300 dringt deze Arabische trigonometrie in West-Europa door. Als oudst bekende volledige werk moet hier het werk *De sinibus, chordis et arcubus* van de Spaanse Jood Levi ben Gerson worden beschouwd († 1288), dat ook eerst in de 19e eeuw is teruggevonden.

De verdere ontwikkeling is dan voorlopig geheel aan astronomen te danken: Peurbach schreef *Tractatus de sinibus et chordis* met sinustafel ($R = 6 \cdot 10^5$; interval 10'). Belangrijk was vooral Regiomontanus (1436—1476) met zijn *De Triangulis omnimodis libri V*, gedrukt in 1533, en verscheidene tafelwerken, waarin ten slotte $R = 10^5 \ldots 10^{15}$, wat neerkomt op sinussen in 5 tot 15 decimalen; er is ook een tangenstafel voor 5 decimalen. Daarna Copernicus met zijn *De lateribus et angulis triangulorum libellus* (1542). De tafels zijn vooral verbeterd door Rhaeticus ($R = 10^7$; interval 1'). Hij en Copernicus vermijden de term sinus als zijnde barbaars-saraceens en zeggen halve koorde.

Bij het steeds toenemend aantal decimalen werden de berekeningen natuurlijk wel veel omslachtiger. Er kwam daardoor een dringende behoefte aan vereenvoudiging van het gewone rekenen, die op den duur bevredigd zou worden door de logarithmen. Geen wonder, dat deze dan ook in verband met de goniometrie het eerst bedacht zijn en dat de oudste logarithmentafel een log sinus-tafel was. Hiermee komen wij echter in een geheel andere phase van de geschiedenis der wiskunde, waarop ik in deze voordracht niet zal ingaan.

DIDACTISCHE REVUE

I. *School Science and Mathematics*, Journal for all Science and Mathematics Teachers, Volume LIII, Number 8, Whole 469, November 1953.

Uit de inhoud.

1. *"How to use the textbook in science teaching"*, door G. G. Mallinson.
2. *"Mathematics and its english"*, door R. E. Fleming.
3. *"The future of mathematics education in the secondary school"*, door W. D. Reeve.

In een uitvoerig artikel (van meer dan 22 bladzijden) geeft de bekende Amerikaanse didacticus ons een waardevol inzicht in de stand van het wiskundeonderwijs in de Verenigde Staten. Besproken worden:

a. Traditional attacks on mathematics.

1. The teaching of mathematics does not result in correct practices among the students who study it.
2. Too many students fail in algebra and they spend too much time in failing. De auteur merkt op, dat de moeilijkheden veel geringer zouden worden, indien men evenals in Europa eerder met algebra begon en het onderwijs over een groter tijdsbestek uitstrekte.
3. Too many students hate algebra even though they may not fail in it.
4. The many difficulties of Euclidean geometry have been crowded into one year's study for the student and the inevitable result is a kind of memoriter learning that is a disgrace to all concerned.
5. The doctrine of transfer has been seriously questioned.

b. The recent situations in mathematics.

Voor de oorlog waren er vele invloeden werkzaam, die het wiskunde-onderwijs dreigden te besnoeien of op te heffen. De oorlog heeft het begrip voor de betekenis van de wiskunde doen groeien en tevens licht geworpen op een aantal gebreken in het huidige onderwijs.

Toepassingen uit de natuurwetenschappen en uit de militaire wetenschappen kunnen voor het onderwijs nut hebben.

c. The future situation in mathematics.

Een lijst van 13 voorstellen tot verbetering van het wiskunde-onderwijs wordt opgesteld, benevens een lijst van wensen, waaraan de ideale wiskunde-leraar zal hebben te voldoen!

4. *"Integration in the teaching of trigonometry in the secondary school"*, door T. E. Rine.

5. *"Two millions enrollment increase"*.

Het aantal leerlingen voor alle inrichtingen van onderwijs is in het schooljaar 1953/54 bijna 37 millioen, d.i. 2 millioen meer dan in het voorafgaande jaar. Voor de elementary schools, secondary schools en voor college en university zijn de aantallen opvolgend 27 millioen, 7.3 millioen en 2.5 millioen.

II*a*. *Elemente der Mathematik*, Band VIII, Nr. 6; 15 November 1953; Verlag Birkhäuser, Basel.

Uit de inhoud.

1. *„Einfall und Überlegung in der Mathematik"*; inaugurele redevoering van prof. dr B. L. van der Waerden, op 2 Februari 1952 te Zürich.

Steunend op mededelingen van Hadamard, Poincaré e.a., op geschriften over Archimedes en op zelfwaarneming, geeft de auteur ons enige kijk op het mechanisme van het onbewuste denken om vervolgens na te gaan hoe de relatie tussen het onbewuste en het ons uiteraard beter toegankelijke bewuste denken is. Polya's *"How to solve it?"* wordt besproken. Aan het slot zegt prof. van der Waerden:

„Das Unbewusste hat drei Richtlinien bei der Auswahl der brauchbaren Vorstellungskombinationen. Erstens wählt es vorzugsweise schöne Kombinationen. Zweitens tritt bei gewissen Begriffsverbindungen die Intuition der Richtigkeit, der Evidenz hinzu. Schliesslich hat das Unbewusste ja vom Bewusstsein einen Auftrag erhalten: die gewünschte Begriffskombination soll Bedingungen erfüllen, die das Bewusstsein gestellt hat. Durch bewusstes Denken habe ich mir klar gemacht: Wenn ich so etwas finden würde, dann wäre die Aufgabe gelöst. Das Unbewusste hat, wie ein gewissenhafter Archivar, etwas gefunden, das die Bedingungen erfüllt, also kann es das gefundene getrost vorlegen und sagen: Das ist die Lösung."

2. G. Adams: *„Conchoid and negative Circle"*.

3. In *„Kleine Mitteilungen"* worden de publicaties over een theorema van Pompeïu („Men kan steeds een driehoek construeren met tot zijden de afstanden van een punt van het vlak van die driehoek tot de hoekpunten van die driehoek") besloten met bijdragen van Lauffer en Sydler. Een elementair meetkundig bewijs van Van Kol (Eindhoven) wordt geplaatst. In *„Um den Satz von Wilson"* wordt een twijfel, geuit in Mantel's *„Getallenleer"* omtrent Wilson, ontzenuwd.

Onder de *„Neue Aufgaben"* trekken er twee (van Beumer, Bergen-op-Zoom en van Bremekamp, Delft) de aandacht van Nederlanders.

IIb. *Elemente der Mathematik,* Band IX, Nr 1, 15 Januari 1954; Verlag Birkhäuser, Basel.

Uit de inhoud.

1—2. De artikelen van Van der Waerden en van Adams uit de vorige aflevering worden voortgezet.

Nadat de auteur de vorige maal had uiteengezet hoe Archimedes met zijn evenwichtsbeschouwingen oppervlakte en inhoud van de bol heeft gevonden, gaat hij thans na „wieviel in diesen Beweisen durch systematische *Überlegung* gefunden sein kann und welche Rolle dem *Einfall* zukommt". Een analyse van de gevolgde redenering brengt hem tot de conclusie dat het aantal „Einfälle" tot twee is te reduceren, en hij laat zien „wie man durch bewuszte Überlegung die Einfälle geradezu provozieren kann, indem man sich richtig klarmacht, welche Schwierigkeit an der betreffende Stelle zu überwinden ist und welche Bedingungen die gesuchte Umformung oder Zerlegung zu erfüllen hat".

3. H. Riedwill en H. Debrunner geven *„Drei neue Näherungskonstruktionen für die Quadratur des Kreises"*.

4. De rubrieken *„Aufgaben"*, *„Berichte"* (o.a. over de jaarvergaderingen van de „Schweizerische Mathematische Gesellschaft" en van de „Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer") en *„Literaturüberschau"* besluiten de aflevering.

III. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*; 6. Band, 6. Heft, 1953/54; Bonn/Rhein, Frankfurt/M.

Uit de inhoud.

1. De historicus J. E. Hofmann geeft een korte levensschets van de nu 80-jarige H. Dörrie, die o.m. door zijn *„Triumph der Mathematik"* ook in ons land bekendheid verwierf.

2. E. Wopperer beschouwt in „*Mathematik als Sprache*" de polaire samenhang tussen natuurkunde en wiskunde. Hij wenst de tendens om in de wiskunde niets anders te zien dan een hulpwetenschap voor andere wetenschappen, als een leverancier voor bruikbare reken- en constructiemethoden, te herzien. Aansluitend bij ideeën van Drenckhahn verklaart Wopperer: „Die Zielstellung (der Didaktik der Mathematik) darf sich nicht mehr nur auf das Formal-Logische beschränken, sie musz sich zu jener einer Gegenstandslogik erweitern". Nodig is het, de wiskunde op te vatten als taal. „Sie ist die Sprache, in der alle jene Bereiche zur gültigen Aussage gelangen, in denen es auf Exaktheit ankommt". Uitvoerige beschouwingen over de afleiding van de limiet „e" illustreren het betoog.

3. M. Neunhöffer behandelt in „*Über den physikalischen Wirkungsbegriff und seine raumgeometrische Veranschaulichung*" de vraag: „Wie sind die Wurzeln, mit denen der Wirkungsbegriff in der klassischen Physik verankert ist, anschaulich darzustellen?"

4. B. Steffen vervolgt zijn artikel over: „*die Entwicklung des anorganischen Naturbildes im* 19. *und* 20. *Jahrhundert*".

5. O. Hofmann geeft in „*Zur Ganzzahligkeit in der Geometrie*" o.a. een tabel van getallen $(a, b, c; d)$, waarvoor $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

6. W. Nesz bewijst met behulp van complexe getallen de stelling „Sind in einem Sehnensechseck eines Kreises drei nicht benachbarte Seiten gleich dem Radius, so bilden die Mitten der drei übrigen Seiten ein gleichseitiges Dreieck".

7. P. Dallmann geeft een nieuwe methode aan ter berekening van de limiet van $\frac{x}{\sin x}$ voor $x \to 0$.

8. E. Lampe beproeft een „*Ehrenrettung der Cosinussatz*", die W. Böhme uit het trigonometrieonderwijs wenst te verbannen.

9. P. Göhlke bespreekt „*das sogenannte vollständige Viereck*".

10. A. Moessner geeft een serie „*Elementare Identitätskuriosa*". Als voorbeelden, die zich lenen tot generalisering, noemen we:

$$\frac{2^2+3^2}{2{,}6^2} = \frac{2+3}{2{,}6} \text{ en } \frac{49^5+75^5+107^5}{39^5+92^5+100^5} = \frac{49+75+107}{39+92+100}.$$

11. H. Gundermann geeft een „elementare Auswertung von

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

12. K. Scholich geeft een bijdrage tot de discussie over de vraag: „*Mathematischer Aufsatz oder Grosz-Aufgabe?*" Hij stelt een serie

opgaven op, waarvan de opvolgende berekeningen leiden tot een compositie, die verwantschap vertoont met een opstel, maar die uit een oogpunt van examen-techniek hierboven te verkiezen is.

Van didaktisch standpunt is de belangrijkste bijdrage die van A. Kraft over een ontwerp-leerplan (*Kasseler leerplan* 1953). We ontlenen aan het artikel het volgende:

Kasseler Lehrplan von 1953.

Die Mathematik ist in ihrem Ursprung von der Lösung praktischer Aufgaben ausgegangen, hat sich aber frühzeitig und dann in stets wachsendem Masze zu einem vielschichtigen geistigen Gebilde entwickelt. Sie hat entscheidend beigetragen ebenso zum Selbstverständnis des Geistes wie zur Bewältigung der Wirklichkeit. Damit erweist sie sich als einer der tragenden Pfeiler der Kultur, darüber hinaus als ein eindeutiges, überall verständliches Ausdrucksmittel des Geistes, ohne das heute weder die Welt verstanden noch das menschliche Leben erhalten werden kann.

So wird auch der junge Mensch, ausgehend von praktischen Aufgaben, vorstoszen müssen bis zu einem vertieften Eindringen in die Eigenart dieser in sich ruhenden Geisteswissenschaft.

Kennzeichnend für die Mathematik ist die unanfechtbare Gültigkeit ihrer Aussagen. Sie ermöglicht es dem Lernenden, das Ergebnis seiner Arbeit in allen Stufen selbst und ohne Bezugnahme auf irgendeine äuszere Autorität zu prüfen. So kann er unmerklich vom Erzogenwerden zur Selbsterziehung gebracht werden.

Methodische Bemerkungen.

I. Allgemeines.

1. Der Schüler soll mathematische Erkenntnisse möglichst durch eigene Betätigung gewinnen.
2. Der Lehrer wird darauf bedacht sein, den Unterricht der geistigen Lage und Entwicklung seiner Schüler anzupassen. Er wird im allgemeinen den induktiven Weg wählen, der von der Anschauung zum Begriff führt.
3. Verständnis für Schluszweisen und Beweisverfahren ist wichtiger als die Kenntnis von Regeln und Formeln.
4. Begriffliche Sauberkeit, Klarheit des Denkens und Pflege des sprachlichen Ausdrucks sind Voraussetzungen eines jeden Unterrichtserfolges.
5. Echte, dem Verständnis des Schülers zugängliche Sachaufgaben sind wertvoller als wirklichkeitsfremde. Lebensnähe des Unterrichts wird das Interesse des Schülers fördern.

6. Auf allen Alterstufen müssen Raumanschauung, Raumvorstellung und Raumdarstellung gepflegt werden.
7. Sicherheit in der Handhabung aller der Schule zugänglichen mathematischen Hilfsmittel is zu fördern.
8. Grundlegende Begriffe der modernen Mathematik wie Menge, Abbildung, Dualität und Gruppe sollen an einfachen und anschaulichen Beispielen erläutert werden.
9. An mathematich erfaszbaren Problemen des kulturellen, insbesondere des wissenschaftlichen Lebens ist an geeigneten Stellen die ordnende Kraft der Mathematik aufzuweisen.
10. Geschichtliche Betrachtungen schärfen den Blick dafür, welchen Einflusz die Mathematik in entscheidenden Epochen der Geistesentwicklung gehabt hat; sie sind in allen Klassenstufen in geeigneter Form durchzuführen.
11. Wesentlicher Bestandteil des mathematischen Unterrichts ist auch die zu philosophischer Vertiefung führende Einordnung des Lehrstoffs in das Gesamtgefüge des der Schule zugänglichen Teilgebietes der Mathematik.

II. Rechnen, Arithmetik, Algebra und Analysis.

1. Der Rechenunterricht ist als propädeutischer Unterricht aufzufassen. Er geht den induktiven Weg von der Anschauung zum Begriff. Das funktionale Denken soll an passenden Beispielen wie Zahlenreihen und Tabellen und zeichnerische Darstellung geübt werden. Das Kopfrechnen ist besonders zu pflegen. Die erste Quadratzahlen sind einzuprägen.
2. Im Unterricht aller Klassen sind Schätzungen und Messungen durchzuführen. Der Sinn für die Gröszenordnung musz frühzeitig geweckt werden. Die Schüler sind anzuleiten, jeder grösseren Rechnung einen Überschlag vorauszuschicken und die Genauigkeit des Ergebnisses zu erörtern.
3. Die Behandlung der linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten kann durch Einführung von Determinanten abgeschlossen werden.
4. Der Rechenstab kann schon vor der Behandlung der Logarithmen verwendet werden.
5. Der Infinitesimalrechnung ist eine einwandfreie, wenn auch propädeutische Behandlung des Grenzwertes von Zahlenfolgen vorauszuschicken. Differential- und Integralrechnung sind möglichst als Einheit zu behandeln. Auch die graphischen Methoden des Differenzierens und Integrierens können be-

trachtet werden. Ein zu weit gehendes Eindringen in die Technik des Integrierens ist zu vermeiden.
6. Das zahlentheoretische Denken bedarf besonderer Förderung und Pflege.
7. An geeigneten Stellen des Unterrichts aller Stufen ist die Verwendung der vektoriellen Schreibweise anzustreben.
8. Die Formen des schriftlichen Rechnens sollten den Grundsätzen des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (DAMNU) folgen.

III. Geometrie.

1. Das Bedürfnis nach einem Beweis musz allmählich entwickelt werden. Für den Anfangsunterricht ist die Euklidische Form wenig geeignet.
2. Die Untersuchung ebener Figuren ist auf allen Klassenstufen soweit wie möglich mit der Betrachtung von Körpern zu verbinden.
3. Es ist angebracht, bei der Betrachtung von Einzelfiguren aus diesen durch Veränderung einzelner Stücke Figurenscharen abzuleiten und an ihnen funktionale Untersuchungen anzustellen.
4. Der Aufbau des geometrischen Unterrichts soll durch den Gruppenbegriff bestimmt und mindestens bis zu der Gruppe der Affinität geführt werden.
5. Auf den werkgerechten Gebrauch der Zeichengeräte und auf saubere, anschauliche Zeichnungen ist Wert zu legen.

Stoffverteilung.

Voor de verdeling der leerstof over de 13 schooljaren verwijzen we naar het nummer van de MNU (blz. 285—287). We nemen alleen nog op de paragraaf over:

Wahlfreie Stoffgebiete.

Für mathematisch-naturwissenschaftliche Schulformen und für Arbeitsgemeinschaften an allen höheren Schulen werden u.a. folgende Stoffgebiete empfohlen:

Ausgewählte Kapitel aus der Zahlentheorie. — Kombinatorik. — Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Erste Einführung in die Theorie der Gruppen. — Einfache Probleme der Mengenlehre. — Unendliche Reihe. — Vektoralgebra. — Nomographie. — Ausgewählte algebraische und transzendente Kurven. — Einfache Differentialgleichungen. — Mathematische Behandlung physikali-

scher und technischer Fragen. — Analytische Geometrie des Raumes. — Flächen zweiter Ordnung. — Einfache konforme Abbildungen. — Ausgewählte Kapitel der Darstellende Geometrie. — Kartenentwurfe. — Photogrammetrie. — Mathematik und Astronomie. — Mathematik und Kunst. — Philosophische Probleme der Mathematik. — Gechichtliche Entwickelung mathematischer Probleme. — Lektüre geeigneter (auch fremdsprachlicher) Originalarbeiten.

IV. *The Mathematical Gazette*; vol. XXXVII, No 322, December 1953; London, G. Bell & Sons.

Uit de inhoud.

1. Laura Guggenbuhl vermeld in „*Henri Brocard and the geometry of the triangle*" de betekenis van het punt van Brocard en vermeld een aantal biografische bijzonderheden uit het leven van deze auteur (1845—1922).

2. Het artikel „*Two inequalities*" van prof. G. N. Watson wordt opgenomen juist 50 jaar nadat het eerste wiskundig artikel van deze geleerde het licht zag (in de Gazette van Dec. 1903). De ongelijkheid van Schur, voor niet negatieve μ en positieve x, y en z:

$$x^{\mu}(x-y)(x-z)+y^{\mu}(y-z)(y-x)+z^{\mu}(t-7)(z-y)\geqq 0,$$

opgenomen in "*Inequalities*" van Hardy, Littlewood en Pólya (1934) wordt in het nieuwe artikel uitgebreid voor $-1<\mu<0$; er worden enige identiteiten uit afgeleid.

3. W. R. Andress en W. Saddler schrijven over "*Perspective Triads*", C. C. Puckette over "*the Curve of Pursuit*,', M. Rumney over „*Equations in Polynomials*".

4. In de afdeling „*Mathematical Notes*" (26 nummers, 26 blz.) vindt men o.a. mededelingen over het raakpunt van de ingeschreven cirkel aan de negenpuntscirkel, over de raket-beweging, over de zonnewijzer, over de omkering van de stelling van Pythagoras, over de vergelijking $x^2-cy^2=z^2$, over de verdeling der priemgetallen, over een benadering van π.

5. De rubriek „*Reviews*" (30 blz.) is als gewoonlijk zeer goed verzorgd.

V. *School Science and Mathematics*; Volume LIII, Number 9, Whole 470; December 1953.

Uit de inhoud.

1. "*How to make arithmetic meaningful in the junior high school*", door H. L. Steyn.

"It is the purpose of this article to show that the junior high school teacher, by using a meaningful approach, can help students to improve their computional skills and to reorient their thinking about arithmetic processes by (*a*) clarifying anew the nature of the number system, and (*b*) teaching the rationale of the arithmetic processes as a basis for review and pratice".

Het artikel bevat veel juiste opmerkingen over het gebrek aan rekenvaardigheid en inzicht bij de leerlingen en enkele wenken van didactische betekenis: "Arithmetic can be made meaningful in the junior high school by utilizing concrete situations and by moving gradually from the concrete to the abstract and symbolic... Junior high school teachers should not consider it beneath their dignity to utilize concrete materials to develop abstract processes... Forcing learning of rote methods merely to produce results without understanding may well cause loss of interest, and prevent individuals from striving for the insights necessary to produce succesful achievement".

2. "*On the definability of zero to the power zero*", door R. S. Fouch. De auteur tracht aannemelijk te maken dat men bij het definiëren van $x^0 = 1$ de uitzondering $x = 0$ kan laten vervallen "insofern as we are concerned with extension of the exponent laws".

3. "*On teaching of the slide rule*", door G. F. Graesser.

De auteur bespreekt enig oefenmateriaal bij het itereren van de logarithmeneming, naar aanleiding van de formule

$$\log lg\, x = \log lg\, N + \log n, \text{ als } x = N^n.$$

4. "*The content of a junior college course in mathematics for the purpose of general education*" door L. G. Woodby is een gedeelte van het proefschrift van de auteur getiteld: "A synthesis and evaluation of subject-matter topics in mathematics for general education" (Michigan, 1952).

De auteur zet uiteen op welke wijze hij een lijst van 570 onderwerpen heeft opgesteld, die geacht kon worden "a sufficiently complete and defensible source of content for courses in mathematics for general education in grades XIII and XIV" te geven. Een 19-tal specialisten traden op als jury en voorzagen elk onderwerp van één der cijfers 0 tot 3, waarbij „0" betekende, dat het onderwerp geheel ongeschikt was voor de cursus en „3" dat "the item is an essential one for inclusion in the course". Opgenomen is een lijst van meer dan 300 onderwerpen, gerubriceerd, die alle met meer dan 38 van de 57 mogelijke punten uit de beoordeling te voorschijn kwamen. Deze lijst geeft ons een kijk op de leerstof die in Amerika voor het beoogde doel wenselijk wordt geacht.

5. In *"Complex thoughts"* haalt J. M. Stephenson een jeugdherinnering op aangaande het eerste contact met irreële getallen en over de houding van zijn leermeester in deze. Hij besluit: „The inevitable conclusion from re-reading the ink-stained article is that one cannot have access to a library too early in life".

6. *"Improving problem solving in arithmetic"*, door E. A. Stahl. De auteur zegt: "It is always most detressing to hear children heave a long sigh when a thought problems list is assigned. Teachers, too, turn to these lists with trepidation. They also seem to have the feeling that here trouble and confusion begins." Hij is van oordeel dat de hoofdfout zit in niet goed kunnen lezen, en geeft middelen ter verbetering aan.

7. *"Problem Department"* en *"Book Reviews"*.

VI. *The Mathematics Teacher*; Volume XLVI, Number 8; December 1953; Washington.

Uit de inhoud.

1. R. Elias, *"Mathematics at work in the paper industry"*. De vraag is niet, of er in het papierbedrijf wiskunde te pas komt, maar enkel welke soorten van wiskunde er een rol spelen. De auteur is van oordeel, dat men (tenzij men de mathesis enkel om de „mental exercise" zou wensen te beoefenen) er goed aan doet rond te zien, welke onderwerpen er in industrie en bedrijf van betekenis blijken. Een deel van de opmerkingen heeft betrekking op traditionele leerstof ". . . while the technical men may often use trigonometry, analytical geometry, and calculus, they are greatly outnumbered by those who use the simpler forms of mathematics, and use them a great deal day after day. I am thinking of the cost accountants, the production schedulers, and the men who take inventory of materials on hand and who forecast coming requirements for materials. There are also those who do market research . . ."

De auteur waarschuwt tegen een te grote tolerantie wat betreft meet- en rekenfouten. "As I look back at my mathematic teachers I have a feeling that they were all too tolerant whenever we had the wrong answers, but "had the right idea", or had "almost the right answer", or had "everything right except for the placement of the decimal point, which was one or two places off". Studie van nomogrammen, van statistiek en het vaardig werken met de rekenliniaal staan op de verlanglijst van de schr. Deze eindigt met de opmerking, dat "the future progress of the paper industry, and for that matter of all industry, depends to a large degree upon how well teachers of mathematics do their job".

2. H. Chipman schrijft over *"A Mathematics quiz program"*. Voor Nederlandse scholen niet aantrekkelijk.

3. M. F. Rosskopf, *"Professionalized subject matter for junior high schools mathematics teachers"*.

De vraag van de auteur is, welke leerstof er in aanmerking komt voor de wiskundige vorming van de leraar in verband met het later door hem te geven onderwijs, afgezien van zijn vakwetenschappelijk vorming. Hij illustreert zijn opvattingen aan de hand van leerstof over het zeventallig stelsel en over een modulair getallenstelsel, dat zich beperkt tot de getallen 0, 1, 2, 3, 4 en de bewerkingen + en ×. Voorts bespreekt hij nog de problemen verbonden aan het invoeren van positieve en negatieve getallen.

4. J. W. Cell, *"The principle of linearity-theory and application.*

5. W. J. Moonan, *"Statistical training for secondary schools"*. Doel van dit artikel is de aard van moderne statistische methoden te schetsen en het onderwijs in dit vak op de middelbare scholen aan te moedigen.

6. J. D. Wilson, *"Arithmetic for majors?"*

De auteur geeft een schets van een beter onderwijs in de rekenkunde voor a.s. onderwijzers en leraren.

7. Ph. S. Jones, *"The binary system"*.

De auteur verklaart: "The binary system is associated at once with both the most primitive, perhaps prehistoric, mathematics and some of its newest developments". Het artikel bevat tal van historische bijzonderheden.

8. Norman Anning spreekt in *"On cyclic sets of digits"* over repeterende breuken, die door cyclische verwisseling van de cijfers in elkaar overgaan; L. L. Pennisi behandelt in *"On the nonexistence of integral roots"* een eenvoudig criterium voor het ontbreken van gehele wortels in hogere-machtsvergelijkingen; A. Struyk geeft een simpele constructiemethode voor parabolen in de bijdrage *"Theme paper, a ruler, and the parabola"*.

9. W. L. Schaaf geeft een waardevolle bibliographie voor de rekenkunde. Hij zegt ter inleiding: "The following notes bring together data on several related aspects of arithmetic, to wit, numerals, numeration, number mysticism, and numerology. The reason is twofold: (1) because of their intrinsic interest and significance, and (2) because the literature on these subjects, although quite extensive, is unfortunately rather scattered".

10. K. E. Brown behandelt de vraag *"What research has there been in mathematics in 1952?"* en geeft de titels van een 57-tal

studies, die in een speciale "summary" van zijn hand, waarnaar hij verwijst, worden geanalyseerd.

De afdelingen "*Aids to teaching*" (8 blz.) en "*Book section*" (10 kolommen boekbeoordelingen) besluiten deze laatste aflevering van jaargang 1953.

VII. *Paedagogische Studiën*, 31e jrg, 1e afl., Jan. 1954; J. B. Wolters, Groningen.

Uit de inhoud.

1. Belangrijk is het artikel van prof. dr H. W. F. Stellwag, getiteld „*Enkele suggesties t.a.v. de leraarsopleiding*".

De schr. vraagt zich af, in verband met het K.B. van 28 Augustus 1952, op welke gebieden de theoretische oriëntering voor de a.s. leraar het meest noodzakelijk is, welke onderwerpen dus op de colleges in de eerste plaats behandeld moeten worden; in welke vorm de colleges moeten worden ingericht en hoe de practische opleiding dient te zijn. Ze gaat na welke onderwerpen uit de speciale didactiek, uit de algemene didactiek en uit de paedagogische psychologie der puberteit in het bijzonder de aandacht verdienen. Zij verdedigt het door dr Karsemeyer voorgestelde assistent-leraarschap en gaat uitvoerig in op de status van de didacticus aan wie de speciale didactiek en de leiding bij het practische deel der vorming zullen worden toevertrouwd. De didacticus dient deel uit te maken van het aan de Universiteit verbonden Paedogogisch Instituut en hierin zijn volledige betrekking te vinden.

2. G. van Tellingen schrijft over: „*Een onderzoek naar het verschil in mondelinge en schriftelijke uitleg bij rekenen*".

Hij herinnert aan een constatering van A. J. Lynch, in "The Rise and Progress of the Daltonplan", dat de meeste leerlingen der Daltonschool onvoldoende rekenvorderingen maken en brengt verslag uit van een eigen onderzoek, dat leert dat de schriftelijke uitleg meer tijd eist, dan verantwoord is te achten.

3. Prof. dr M. J. Langeveld waarschuwt onder de titel „*Staatspaedagogiek*" tegen de houding van de Minister van O.K.W. tegenover beroepskeuzeadviseurs en psychologen aangenomen; het gaat om de verantwoordelijkheid en de bevoegdheid van de opvoeder tegenover die van de psycholoog.

4. Opgenomen zijn de „*Resolutions et décisions du premier congrès international de l'enseignement universitaire des sciences pédagogiques*" (Gent, 7—12 Sept. 1953).

WANSINK.

Inhoud van de 29e jaargang 1953/1954

OFFICIËEL

VERSCHEIDENHEDEN.

KORRELS